№6-дәріс

Жазықтық. Кеңістікте түзу. Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы

Жазықтық

Жазықтықтың жалпы теңдеуі

$$P \sim \quad Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1)$$

мұндағы $\overline{N}(A, B, C) \perp P$ - P жазықтығының нормаль векторы.

1. Егер $D = 0$, онда түзу координатаның бас нүктесі арқылы өтеді.
2. Егер $A = 0$, онда $l \,||\, OX$.
3. Егер $A = 0$, $B = 0$, онда $P \,||\, OXY$.
4. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ - координат жазықтықтарының теңдеулері.

Үш нүкте $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_1)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі: $M(x, y, z)$ - жазықтықтың ағымдық нүктесі болсын. Онда M_1, M_2, M_3, M бір жазықтыққа тиісті дегеннен, $\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}, \overline{M_1M}$ - компланар екендігі шығады, яғни

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

Кесіндідегі жазықтықтың теңдеуі

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Жазықтықтың нормаль теңдеуі

$$x\cos\alpha + y\sin\beta - z\cos\gamma - p = 0, \qquad (3)$$

мұндағы $\overline{n^o} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ P жазықтығына перпендикуляр, ал p - координаттың бас нүктесінен жазықтыққа дейінгі ара қашықтық.

(1) түріндегі жазықтықтың теңдеуін (3) түріндегі теңдеуге келтіру үшін, жазықтықтың жалпы теңдеуін

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

санына көбейту қажет, мұндағы μ санының таңбасы D-ға карама-карсы.

$M_o(x_o, y_o, z_o)$ **нүктесінен (9) түріндегі жазықтыққа дейінгі ара қашықтық мынадай формула бойынша есептелінеді:**

$$d = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Екі жазықтық арасындағы бұрыш. Жазықтықтардың параллельдік және перпендикулярлық шарттары.

Екі жазықтық берілсін

$p_1 \sim \quad A_1x + B_1y + C_1z + D = 0$,

$p_2 \sim \quad A_2x + B_2y + C_2z + D = 0$.

$\overline{N}_1(A_1, B_1, C_1) \perp p_1, \quad \overline{N}_2(A_2, B_2, C_2) \perp p_2$ болғандықтан:

а) екі жазықтық арасындағы бұрыш

$$\cos\alpha = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{|\overline{N}_1| \cdot |\overline{N}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

б) $p_1 || p_2$, егер $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

в) $p_1 \perp p_2$, егер $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

Кеңістіктегі түзу

Кеңістіктегі түзудің теңдеуі екі параллель емес және беттеспейтін жазықтықтардың қиылысуы ретінде беріледі:

$$l \sim \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & \sim \ P_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & \sim \ P_2 \end{cases} \qquad (4)$$

(4)-өрнек түзудің кеңістіктегі жалпы теңдеуі деп аталады.

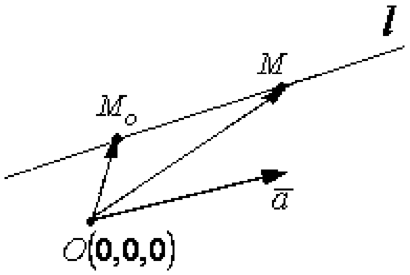
$\overline{N}_1(A_1, B_1, C_1) \perp P_1, \quad \overline{N}_2(A_2, B_2, C_2) \perp P_2$ болғандықтан $\overline{N}_1 \perp l$ және $\overline{N}_2 \perp l$. Бұдан l түзуі

$$\bar{a} = \overline{N_1} \times \overline{N_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \ -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}; \ \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) \qquad (5)$$

векторына параллель.

Егер түзудің кеңістіктегі теңдеуі (4) түрінде берілсе, есеп шығарғанға қолайсыз. Сондықтан, түзу теңдеуінің басқа түрлерін қарастыралық.

Түзудің канондық теңдеуі. $M_o(x_o, y_o, z_o)$ нүктесі арқылы өтетін $\bar{a}(l; m; n)$ векторына параллель түзудің теңдеуін жаз.



$M(x, y, z)$ - түзудің ағымдық теңдеуі болсын. Онда $\overline{M_0M} \,||\, \bar{a}$ және бұдан мынадай қорытынды шығады: $\overline{M_0M} \,||\, t \cdot \bar{a}$, мұндағы t - параметр немесе

$(x - x_o)\bar{i} + (y - y_o)\bar{j} + (z - z_o)\bar{k} = t(l\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k})$.

Бұдан,

$$\begin{cases} x - x_o = lt \\ y - y_o = mt \\ z - z_o = nt \end{cases} \qquad (6)$$

(6) – түзудің параметрлік теңдеуі деп аталады.

(6)-тегі t -ны жоя отырып, түзудің канондық теңдеуін аламыз:

$$\frac{x - x_o}{l} = \frac{y - y_o}{m} = \frac{z - z_o}{n} \qquad (7)$$

Түзудің жалпы теңдеуінен канондық теңдеуіне көшу үшін $z_o = 0$ деп ала отырып, (6)-ші теңдеуден x_0 және y_0 табамыз, ал l, m, n мәндерін (7)-тен аламыз.

Түзулер арасындағы бұрыш.

$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$, $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$ түзулері берілсін және $\bar{a}_1(l_1; m_1; n_1)$, $\bar{a}_2(l_2, m_2, n_2)$. Онда:

а) Түзулер арасындағы бұрыш $\cos\alpha = \frac{\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2}{|\bar{a}_1| \cdot |\bar{a}_2|}$

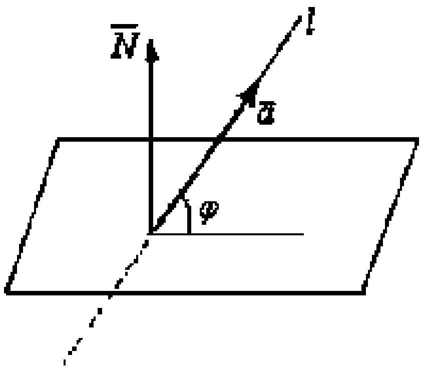
б) Параллельдік шарты $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$

в) Перпендикулярлық шарты $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$

Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш

$$l \sim \frac{x - x_o}{l} = \frac{y - y_o}{m} = \frac{z - z_o}{n},$$

$$P \sim Ax + By + Cz + D = 0$$



$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\bar{N} \cdot \bar{a}}{|\bar{N}| \cdot |\bar{a}|}$ болғандықтан, $\sin\alpha = \frac{\bar{N} \cdot \bar{a}}{|\bar{N}| \cdot |\bar{a}|}$.